MATEMATIKA „A”
12. évfolyam

Ismétlő, rendszerező modul
az emelt szintű érettségire készülőknek

Egyenlőtlenségek

Készítette:
Klementné Mészáros Erzsébet Mária

2010

Bevezetés

Ebben a modulban először áttekintjük a számtani, a mértani, a harmonikus és a négyzetes közép fogalmát, egy közös ábrán szemléltetjük mind a négy közepet, s egyúttal egy nagyon szép geometriai bizonyítást mutatunk meg a közöttük lévő összefüggésekre. Ezeket a közepeket általánosítjuk, majd további nevezetes egyenlőtlenségekkel ismerkedünk meg. Feladatokat oldunk meg a számtani és mértani közép közötti összefüggések , majd a további nevezetes egyenlőtlenségek segítségével, végül szélsőérték-feladatok megoldására használjuk fel a megismert egyenlőtlenségeket.

I. Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép

Tekintsük át két pozitív a és b szám tanult közepeinek fogalmát és a közöttük lévő összefüggéseket!

Legyenek *a* és *b* pozitív valós számok.

Számtani közepük: $$\frac{a+b}{2}$$

Mértani közepük: $$\sqrt{ab}$$

Harmonikus közepük: $$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}=\frac{2ab}{a+b}$$

Négyzetes közepük: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

1. Feladat: Állítsuk ezeket a közepeket nagyság szerinti sorrendbe, és igazoljuk az összefüggéseket!

A megismert közepeket tetszőleges számú pozitív valós számra is általánosíthatjuk:

Legyenek a_1, a_2, a_3, …, a_n pozitív valós számok.

Számtani közepük: $$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

Mértani közepük: $$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}$$

Harmonikus közepük: $$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}}$$

Négyzetes közepük: $$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

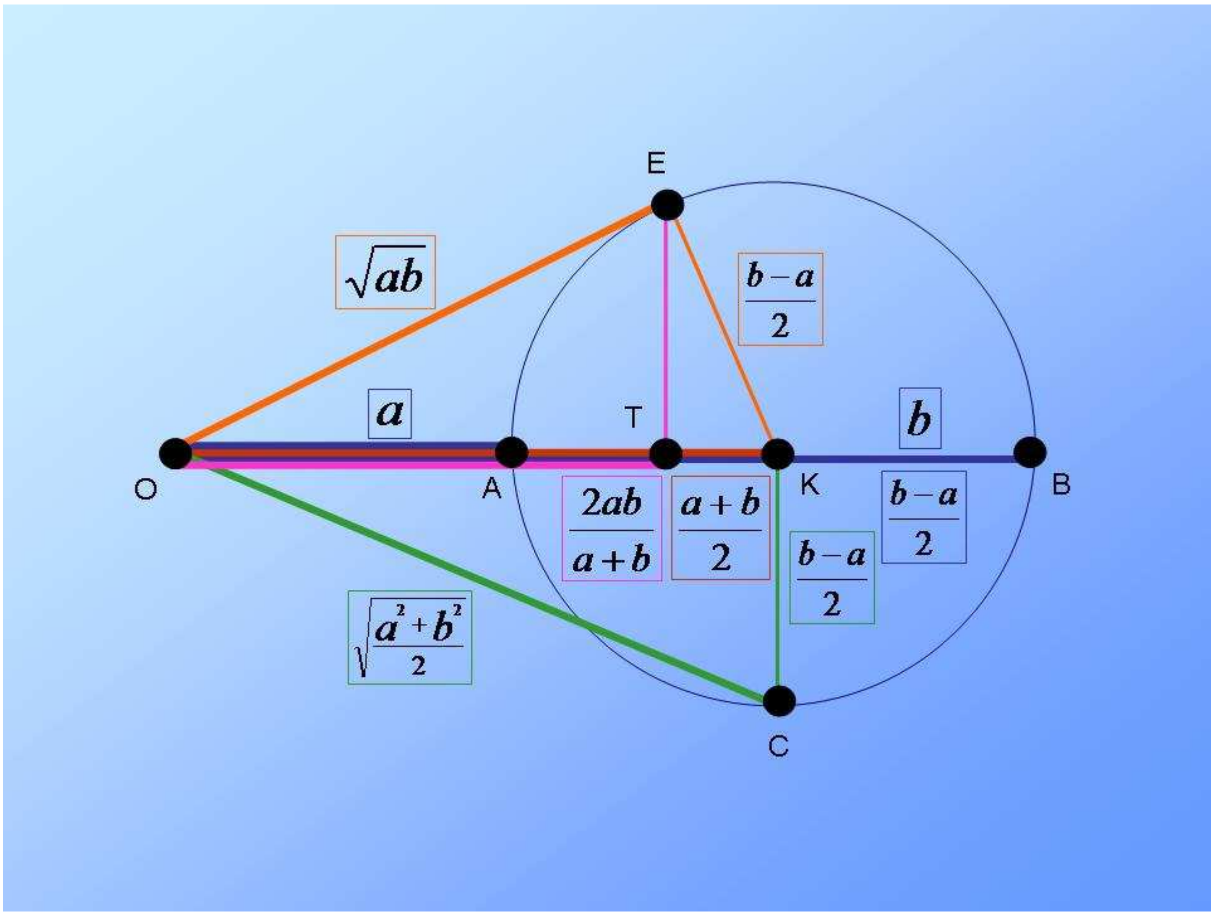
Ezek között hasonló összefüggések állnak fenn.

Gyűjtőmunka: Keressetek a közepek általánosításával kapcsolatos anyagokat, bizonyításokat a könyvtárban vagy az interneten!

A számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép közötti lévő összefüggések geometriai szemléltetése

Most egy új geometriai bizonyítást nézünk meg, ami nagyon szemléletesen mutatja az összefüggéseket egyetlen ábrán mind a négy közép esetén. Ehhez rendelkezésre áll egy Power Point bemutató is, melyben egyenként tekinthetjük át az összefüggéseket.

A bemutató végső ábrája:



Az ábrán nagyon jól látszik, hogy a<b esetén a négyzetes közép az OKC derékszögű háromszög átfogója, aminek a számtani közép az egyik befogója, s az átfogó mindig nagyobb a befogónál. Ezután a számtani közép lesz az ehhez illeszkedő OEK derékszögű háromszög átfogója, aminek a mértani közép az egyik

befogója. Végül a mértani közép lesz az ehhez illeszkedő OTE derékszögű háromszög átfogója, aminek a harmonikus közép az egyik befogója.

Most már csak azt kell megmutatni, hogy a tekintett szakaszok valóban a megfelelő közepekkel egyenlő hosszúságúak.

1)
$$d_{O,K} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

2) Az OKC derékszögű háromszögre felírva a Pithagorasz tételt:

$$d_{O,C} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4} + \frac{b^2-2ab+a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

3) Az OE érintőre és az OA, ill. OB szelőkre felírva az érintőszakaszok tételét:

$$d_{O,E} = \sqrt{a \cdot b}$$

4) Végül az OEK derékszögű háromszög OE befogójára felírva a befogótételt:

$$d_{O,E} = \sqrt{d_{O,T} \cdot d_{O,K}}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{d_{O.T} \cdot \frac{a+b}{2}}$$

Négyzetre emelve és átrendezve:

$$d_{O,T} = \frac{2ab}{a+b}$$

II. A számtani és a mértani közép közötti összefüggéssel megoldható feladatok

2. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a>1$ valós számra fennáll az

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_a 16}\geq 1$$

egyenlőtlenség!

3. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy bármely három pozitív a, b és c valós számra érvényes az

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

egyenlőtlenség!

4. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden olyan pozitív a és b valós számra, amelyek összege 1, igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$$

Állapítsuk meg, hogy az a és b számok mely értékeinél áll fenn az egyenlőség!

5. Feladat: Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)}+\frac{1}{\sin(60^\circ-\alpha)}\geq\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Ahol $0<\alpha<60^\circ$

Végül következzen egy feladat a számtani és a mértani közép közötti összefüggés általános alakjára is!

6. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n>1 egész szám esetén igaz a következő egyenlőtlenség:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

III. Nevezetes egyenlőtlenségek, vegyes feladatok

Bizonyítás nélkül közlünk három nevezetes egyenlőtlenséget, melyeket nagyon gyakran használhatunk feladatok megoldásában.

A háromszög-egyenlőtlenség

Tetszőleges a és b valós számokra

$$\left||a|-|b|\right| \le |a+b| \le |a|+|b|$$

A Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség

Legyen adott 2n számú tetszőleges valós szám:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \text{ és } b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

Ekkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)$$

Egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

A Bernoulli-egyenlőtlenség

Ha h tetszőleges –1-nél nagyobb valós szám és r tetszőleges 1-nél nagyobb valós szám, akkor

$$(1+h)^r \geq 1 + rh$$

Egyenlőség csak a h=0 esetben áll fenn.

7. Feladat: Abban az egyszerű esetben, amikor a kitevő természetes szám, a Bernoulli-egyenlőtlenség így alakul:
Ha h tetszőleges –1-nél nagyobb valós szám és n tetszőleges 1-nél nagyobb természetes szám, akkor

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

Egyenlőség csak a h=0 esetben áll fenn.

Bizonyítsd be a tételt teljes indukcióval!

Gyűjtőmunka: Keressetek nevezetes egyenlőtlenségeket, ezekkel kapcsolatos anyagokat a könyvtárban vagy az interneten!

8. Feladat: Bizonyítsd be, hogy ha $a^2 + b^2 = 1$ és $m^2 + n^2 = 1$, akkor

$$|am + bn| \leq 1$$

9. Feladat: Bizonyítsd be, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$$

ahol x, y, z tetszőleges valós számok.

10. Feladat: Bizonyítsd be, hogy ha a és b pozitív valós számok, n pedig természetes szám, akkor

$$a^n \geq b^{n-1}\left(na - (n-1)b\right)$$

11. Feladat: Bizonyítsd be, hogy ha $q>1$, akkor a q^n számok n elég nagy értékeire bármekkora számnál nagyobbak lesznek!

12. Feladat: Bizonyítsd be, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója pedig c, akkor

$$a + b \leq \sqrt{2} \cdot c$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

IV. Egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték-feladatok megoldásában

Most szélsőérték-feladatok megoldására alkalmazunk egyenlőtlenségeket.

Nagyon fontos előre kihangsúlyoznunk, hogy a nevezetes egyenlőségeinket csak abban az esetben alkalmazhatjuk szélsőérték-feladatok megoldására, ha olyan alakra tudjuk hozni, hogy a kapott egyenlőtlenség egyik oldala állandó érték legyen.

13. Feladat: Adott területű derékszögű háromszögek közül melyiknek a legkisebb az átfogója?

14. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív valós *a* szám esetén

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

15. Feladat: Határozzuk meg az

$$f(x) = ax^m + \frac{b}{x^n}$$

függvény legkisebb értékét, ahol $x>0$, $a>0$, $b>0$ és m, n természetes számok.

16. Feladat: Írjuk fel az *a* valós számot két valós *b* és *c* szám összegeként, úgy, hogy a *bc* szorzat a lehető legnagyobb legyen!

17. Feladat: Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$$

függvény minimumát!

18. Feladat: Határozzuk meg az

$$f(x, y, z) = \frac{(x + y + z)^6}{x\ y^2 z^3}$$

függvény minimumát, ha $x>0$, $y>0$ és $z>0$ valós számok!