MATEMATIKA „A”
12. évfolyam

Ismétlő, rendszerező modul
az emelt szintű érettségire készülőknek

Egyenlőtlenségek

Készítette:
Klementné Mészáros Erzsébet Mária

2010

A modul célja	Az emelt szintű érettségi vizsgakövetelményeiben szereplő ismeretanyag ismétlése, rendszerezése, kibővítése; kitekintés a felsőbb matematika felé.
Időkeret	4 tanóra (4x45 perc)
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, kémia, gazdaságtan, gyakorlati élet Szűkebb környezetben: a középiskolai matematikaanyag megfelelő témakörei, ill. moduljai: egyenletek, függvények
A képességfejlesztés fókuszai	Rendszerezés, érvelés, bizonyítás, probléma-érzékenység, probléma-reprezentáció, ábrázolás, kombinativitás, induktív és deduktív következtetés, mennyiségi következtetés, következtetés, szövegértés, szövegértelmezés, relációszókincs, értelmes memória, metakogníció

AJÁNLÁS:

A modul elsődleges célja, hogy a tanulókat felkészítse az emelt szintű érettségin várható bonyolultabb problémák megoldására, másrészt lehetőséget ad arra, hogy az érdeklődő tanulók elmélyülhessenek az egyenlőtlenségek témakörében.

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK

Ismerje a szám számított középértékeit (aritmetikai, geometriai, négyzetes, harmonikus), valamint a nagyságrendi viszonyaikra vonatkozó tételeket.

Tudjon megoldani feladatokat számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján.

Fontos terület a függvényábrázolás alkalmazása egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásában.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Power Point bemutató,

Gyűjtőmunka, keresés az interneten

Feladatlap

ÓRABEOSZTÁS

Óraszám	Óracím
1.	Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép
2.	A számtani és a mértani közép közötti összefüggéssel megoldható feladatok
3.	Nevezetes egyenlőtlenségek, vegyes feladatok
4.	Egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték feladatok megoldásában

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök
I. Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép			
1.	Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép (csoportmunka)	Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás, induktív következtetés	Gyűjtőmunka
2.	Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép közötti lévő összefüggések geometriai szemléltetése	Figyelem, ismétlés, rendszerezés, metakogníció Frontális munka	Bemutató
II. A számtani és a mértani közép közötti összefüggéssel megoldható feladatok			
1.	Feladatok megoldása (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok.	Feladatlap
III. Nevezetes egyenlőtlenségek, vegyes feladatok			
1.	A háromszög-egyenlőtlenség A Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség A Bernoulli-egyenlőtlenség	Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás, induktív következtetés, elvonatkoztatás. Frontális munka	Gyűjtőmunka
2.	Feladatok megoldása (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció	Feladatlap
IV. Egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték-feladatok megoldásában			
1.	Szélsőérték-feladatok megoldása (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, kombinatív gondolkodás, elvonatkoztatás, metakogníció	Feladatlap

Bevezetés

Ebben a modulban először áttekintjük a számtani, a mértani, a harmonikus és a négyzetes közép fogalmát, egy közös ábrán szemléltetjük mind a négy közepet, s egyúttal egy nagyon szép geometriai bizonyítást mutatunk meg a közöttük lévő összefüggésekre. Ezeket a közepeket általánosítjuk, majd további nevezetes egyenlőtlenségekkel ismerkedünk meg. Feladatokat oldunk meg a számtani és mértani közép közötti összefüggések , majd a további nevezetes egyenlőtlenségek segítségével, végül szélsőérték-feladatok megoldására használjuk fel a megismert egyenlőtlenségeket.

I. Számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép

Ismételjük át két pozitív a és b szám tanult közepeinek fogalmát és a közöttük lévő összefüggéseket!

Legyenek *a* és *b* pozitív valós számok.

Számtani közepük: $$\frac{a+b}{2}$$

Mértani közepük: $$\sqrt{ab}$$

Harmonikus közepük: $$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}=\frac{2ab}{a+b}$$

Négyzetes közepük: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

1. Feladat: Állítsuk ezeket a közepeket nagyság szerinti sorrendbe, és igazoljuk az összefüggéseket!

Megoldás:

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

ahol egyenlőség a=b esetén áll fenn.

Az összefüggéseket korábban igazoltuk algebrai úton, ahol azt használtuk fel, hogy két szám különbségének négyzete nagyobb vagy egyenlő 0-nál.
Pl. a négyzetes közép és a számtani közép közötti összefüggés igazolása:

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

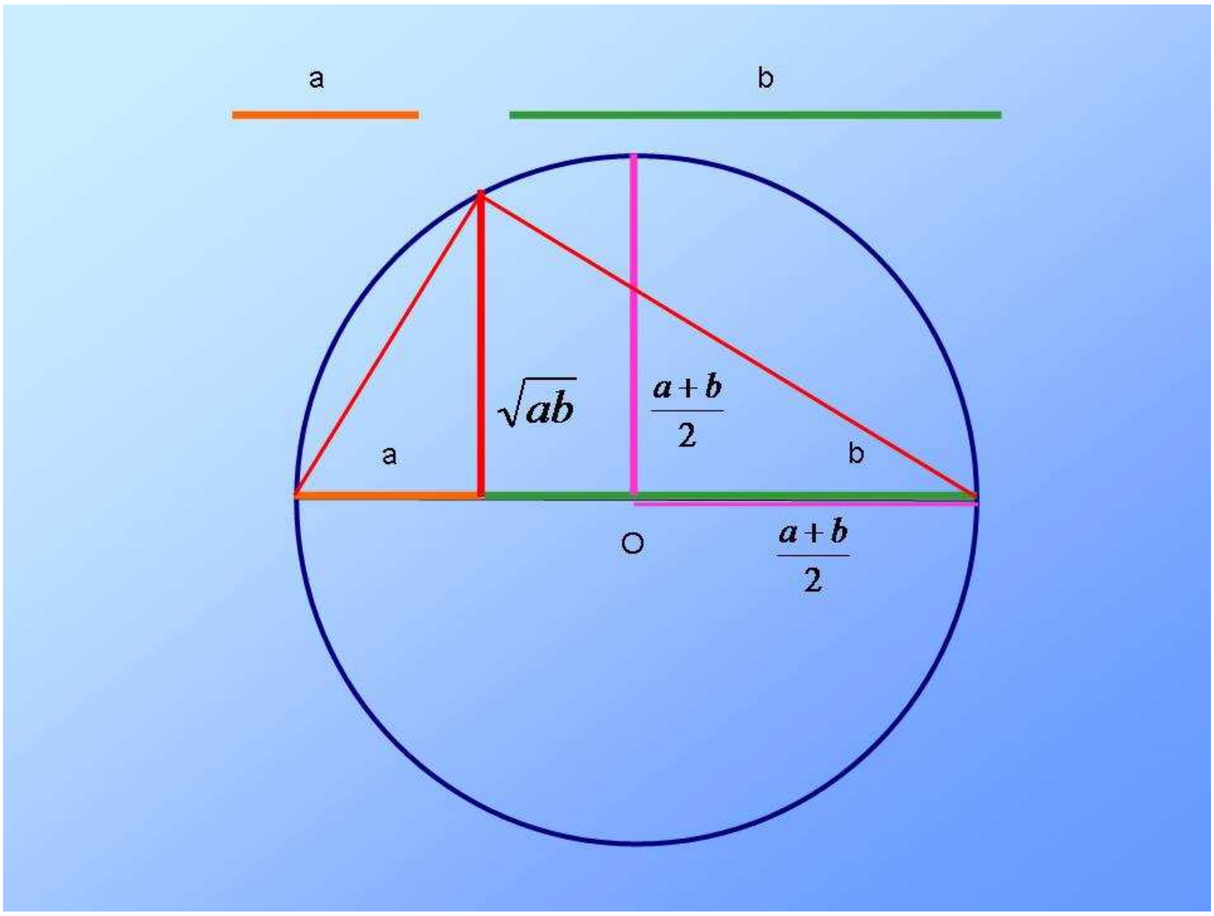
Emeljük mindkét oldalt négyzetre. Mivel mindkét oldalon pozitív számok állnak, ez ekvivalens átalakítás.

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2$$

$$0 \le (a-b)^2$$

A számtani és mértani közép közötti összefüggést geometriai úton is igazolhatjuk a magasságtétel segítségével:



A megismert közepeket tetszőleges számú pozitív valós számra is általánosíthatjuk:

Legyenek $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitív valós számok.

Számtani közepük: $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

Mértani közepük: $$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Harmonikus közepük: $$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}}$$

Négyzetes közepük: $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}}$

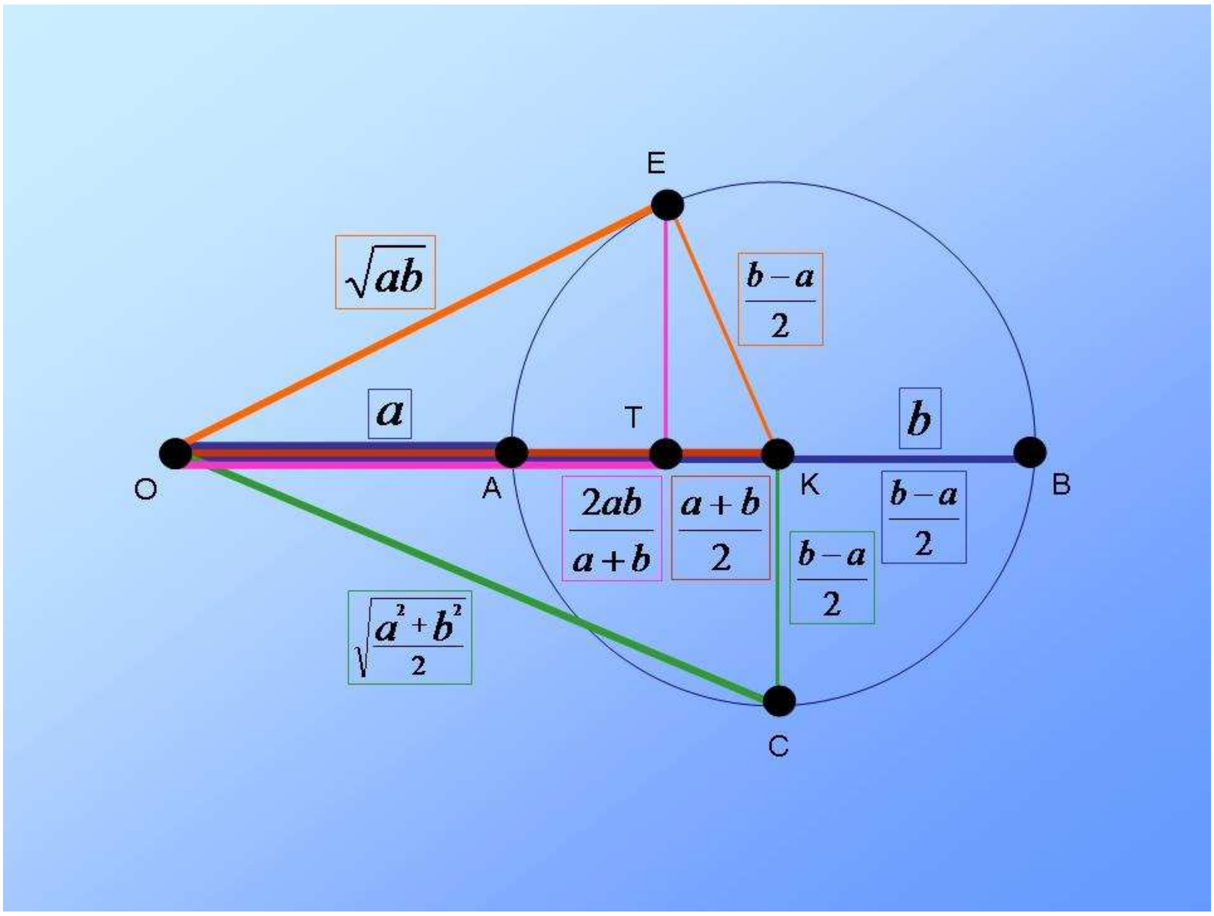
Ezek között hasonló összefüggések állnak fenn.

Gyűjtőmunka: Keressetek a közepek általánosításával kapcsolatos anyagokat, bizonyításokat a könyvtárban vagy az interneten!

A számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közép közötti lévő összefüggések geometriai szemléltetése

Most egy új geometriai bizonyítást nézünk meg, ami nagyon szemléletesen mutatja az összefüggéseket egyetlen ábrán mind a négy közép esetén. Ehhez rendelkezésre áll egy Power Point bemutató is, melyben egyenként tekinthetjük át az összefüggéseket.

A bemutató végső ábrája:



Az ábrán nagyon jól látszik, hogy $a<b$ esetén a négyzetes közép az OKC derékszögű háromszög átfogója, aminek a számtani közép az egyik befogója, s az átfogó mindig nagyobb a befogónál. Ezután a számtani közép lesz az ehhez illeszkedő OEK derékszögű háromszög átfogója, aminek a mértani közép az egyik befogója. Végül a mértani közép lesz az ehhez illeszkedő OTE derékszögű háromszög átfogója, aminek a harmonikus közép az egyik befogója.
Most már csak azt kell megmutatni, hogy a tekintett szakaszok valóban a megfelelő közepekkel egyenlő hosszúságúak.

1)
$$d_{O,K} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

2) Az OKC derékszögű háromszögre felírva a Pithagorasz tételt:

$$d_{O,C} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4} + \frac{b^2-2ab+a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

3) Az OE érintőre és az OA, ill. OB szelőkre felírva az érintőszakaszok tételét:

$$d_{O,E} = \sqrt{a \cdot b}$$

4) Végül az OEK derékszögű háromszög OE befogójára felírva a befogótételt:

$$d_{O,E} = \sqrt{d_{O,T} \cdot d_{O,K}}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{d_{O.T} \cdot \frac{a+b}{2}}$$

Négyzetre emelve és átrendezve:

$$d_{O,T} = \frac{2ab}{a+b}$$

<u>II. A számtani és a mértani közép közötti összefüggéssel megoldható feladatok</u>

Óra elején a gyűjtőmunka értékelése

Egy link:

http://hu.wikipedia.org/wiki/Sz%C3%A1mtani_%C3%A9s_m%C3%A9rtani_k%C3%B6z%C3%A9p_k%C3%B6z%C3%B6tti_egyenl%C5%91tlens%C3%A9g

2. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a>1 valós számra fennáll az

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_a 16}\geq 1$$

egyenlőtlenség!

Megoldás:

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_a 16}=\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\frac{\log_2 16}{\log_2 a}}=\frac{1}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{4}$$

Mivel a>1, az összeg mindkét tagja pozitív, így alkalmazhatjuk a számtani és a mértani közép közötti összefüggést:

$$\frac{\frac{1}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{4}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{\log_2 a}\cdot\frac{\log_2 a}{4}}=\frac{1}{2}$$

Az egyenlőtlenséget 2-vel szorozva épp a bizonyítandó összefüggéshez jutunk.

3. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy bármely három pozitív a, b és c valós számra érvényes az

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

egyenlőtlenség!

Megoldás:

A számtani és a mértani közép közötti összefüggés alapján

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$$

$$\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$

A három egyenlőtlenséget összeszorozva kapjuk, hogy

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2} = abc$$

Az egyenlőtlenséget 8-cal szorozva épp a bizonyítandó összefüggéshez jutunk.

Látható, hogy egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $a=b=c$.

4. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden olyan pozitív *a* és *b* valós számra, amelyek összege 1, igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Állapítsuk meg, hogy az *a* és *b* számok mely értékeinél áll fenn az egyenlőség!

Megoldás:

Írjuk fel az x^2 és y^2 számtani és mértani közepére vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$$

$$x^2+y^2 \geq 2xy$$

$$2x^2+2y^2 \geq x^2+2xy+y^2$$

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

Helyettesítsük be x helyére az $a+\frac{1}{a}$, y helyére pedig a $b+\frac{1}{b}$ kifejezést!

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}\geq\frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$$

Felhasználtuk, hogy a+b=1.

A számtani és a mértani közép közötti összefüggés alapján $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Innen $\frac{1}{ab}\geq 4$, azaz $1+\frac{1}{ab}\geq 5$

Így tehát $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\geq\frac{1}{2}\cdot 5^2=\frac{25}{2}$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a=b=\frac{1}{2}$ teljesül.

5. Feladat: Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)}+\frac{1}{\sin(60^\circ-\alpha)}\geq\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Ahol $0<\alpha<60^\circ$

Megoldás:

Mivel $0<\alpha<60^\circ$, ezért $\sin(60^\circ+\alpha)>0$ és $\sin(60^\circ-\alpha)>0$

Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti összefüggést!

$$\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)}+\frac{1}{\sin(60^\circ-\alpha)}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)}}$$

A $\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}(\cos y-\cos x)$ azonosság felhasználásával kapjuk,

hogy

$$\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha-\cos 120^\circ\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)$$

Ezt a kifejezést visszahelyettesítve az egyenlőtlenségünkbe:

$$\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)}+\frac{1}{\sin(60^\circ-\alpha)}\geq 2\sqrt{\frac{4}{2\cos 2\alpha+1}}$$

A jobb oldalon álló kifejezésértékét csökkentjük, ha $\cos 2\alpha$ helyett 1-et írunk.

Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)}+\frac{1}{\sin(60^\circ-\alpha)}\geq 2\sqrt{\frac{4}{2+1}}=2\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Végül következzen egy feladat a számtani és a mértani közép közötti összefüggés általános alakjára is!

6. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n>1 egész szám esetén igaz a következő egyenlőtlenség:

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Megoldás:

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\leq\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát n-edik hatványra emelve megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

III. Nevezetes egyenlőtlenségek, vegyes feladatok

Bizonyítás nélkül közlünk három nevezetes egyenlőtlenséget, melyeket nagyon gyakran használhatunk feladatok megoldásában.

A háromszög-egyenlőtlenség

Tetszőleges a és b valós számokra

$$\left||a| - |b|\right| \le |a+b| \le |a| + |b|$$

A Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség

Legyen adott 2n számú tetszőleges valós szám:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \text{ és } b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

Ekkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

Egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

A Bernoulli-egyenlőtlenség

Ha *h* tetszőleges –1-nél nagyobb valós szám és r tetszőleges 1-nél nagyobb valós szám, akkor

$$(1+h)^r \ge 1 + rh$$

Egyenlőség csak a h=0 esetben áll fenn.

7. Feladat: Abban az egyszerű esetben, amikor a kitevő természetes szám, a Bernoulli-egyenlőtlenség így alakul:

Ha h tetszőleges –1-nél nagyobb valós szám és n tetszőleges 1-nél nagyobb természetes szám, akkor

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

Egyenlőség csak a h=0 esetben áll fenn.

Bizonyítsd be a tételt teljes indukcióval!

Megoldás:

- n=2-re az állítás igaz: $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 \geq 1+2h$
- Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, bizonyítjuk, hogy akkor n+1-re is igaz lesz.

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+nh+h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$$

Mivel az összeget nh^2-tel csökkentettük, egyenlőség csak $h=0$ esetén állhat fenn.

Gyűjtőmunka: Keressetek nevezetes egyenlőtlenségeket, ezekkel kapcsolatos anyagokat a könyvtárban vagy az interneten!

8. Feladat: Bizonyítsd be, hogy ha $a^2+b^2=1$ és $m^2+n^2=1$, akkor

$$|am+bn| \leq 1$$

Megoldás:

A háromszög-egyenlőtlenség szerint kapjuk, hogy

$$|am+bn| \leq |am|+|bm| = |a| \cdot |m| + |b| \cdot |n|$$

Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget!

$$|a|\cdot|m|+|b|\cdot|n|\le\sqrt{|a|^2+|b|^2}\cdot\sqrt{|m|^2+|n|^2}=1$$

Tehát

$$|am+bn|\le 1$$

valóban teljesül.

9. Feladat: Bizonyítsd be, hogy

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge 0$$

ahol *x*, *y*, *z* tetszőleges valós számok.

Megoldás:

Az $x^2+y^2+z^2$ kifejezést írjuk fel a következőképpen:

$$x^2+y^2+z^2=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{y^2+z^2+x^2}\ge xy+yz+zx$$

Innen átrendezéssel megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

10. Feladat: Bizonyítsd be, hogy ha *a* és *b* pozitív valós számok, *n* pedig természetes szám, akkor

$$a^n\ge b^{n-1}\left(na-(n-1)b\right)$$

Megoldás:

Osszuk el a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát b^n-nel! ($b^n>0$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n\ge n\cdot\frac{a}{b}-(n-1)$$

Ezt kell belátnunk. Alakítsuk át a bal oldalt!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(1+\left(\frac{a}{b}-1\right)\right)^n$$

$\frac{a}{b}>0$ miatt $\frac{a}{b}-1>-1$, így alkalmazható a Bernoulli-féle egyenlőtlenség:

$$\left(1+\left(\frac{a}{b}-1\right)\right)^n\geq 1+n\left(\frac{a}{b}-1\right)=n\cdot\frac{a}{b}-n+1=n\cdot\frac{a}{b}-(n-1)$$

Ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenséget beláttuk.

11. Feladat: Bizonyítsd be, hogy ha $q>1$, akkor a q^n számok n elég nagy értékeire bármekkora számnál nagyobbak lesznek!

Megoldás:

Azt kell belátnunk, hogy bármekkora M szám esetén létezik ν küszöbszám, hogy ha n>ν teljesül, akkor

$$q^n>\text{M}$$

Alkalmazzuk a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget q^n-re!

$$q^n=(1+(q-1))^n\geq 1+n(q-1)$$

A kapott egyenlőtlenség szerint, ha $1+n(q-1)>\text{M}$ teljesül, akkor $q^n>\text{M}$ is teljesülni fog. Az előbbiből kifejezhetjük n-et. Mivel q>1, ezért

$$n>\frac{M-1}{q-1}$$

Legyen tehát a ν küszöbszám $\left[\frac{M-1}{q-1}\right]+1$. Ha n>$\nu$, akkor $q^n>\text{M}$ lesz.

12. Feladat: Bizonyítsd be, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója pedig c, akkor

$$a+b\leq\sqrt{2}\cdot c$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

Megoldás:

A számtani és a négyzetes közép közötti összefüggés alapján

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

A Pithagorasz tétel értelmében $a^2+b^2=c^2$

Ezért

$$a+b \le 2\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\cdot\sqrt{\frac{c^2}{2}} = \sqrt{2}\cdot c$$

IV. Egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték-feladatok megoldásában

Óra elején a gyűjtőmunka értékelése

Egy link:

http://hu.wikipedia.org/wiki/Kateg%C3%B3ria:Egyenl%C5%91tlens%C3%A9gek

A mai órán szélsőérték-feladatok megoldására alkalmazunk egyenlőtlenségeket.

Nagyon fontos előre kihangsúlyoznunk, hogy a nevezetes egyenlőségeinket csak abban az esetben alkalmazhatjuk szélsőérték-feladatok megoldására, ha olyan alakra tudjuk hozni, hogy a kapott egyenlőtlenség egyik oldala állandó érték legyen

13. Feladat: Adott területű derékszögű háromszögek közül melyiknek a legkisebb az átfogója?

Megoldás:

Legyenek a háromszög befogói a és b, átfogója pedig c.

A háromszög területe: $t = \frac{ab}{2}$ állandó.

Pithagorasz tétele szerint $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti összefüggést a pozitív a^2 és b^2 számokra:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \le \sqrt{a^2 b^2}$$

Innen $a^2 + b^2 \ge 2ab$

Ebből következik, hogy

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \ge \sqrt{2ab} = \sqrt{4t} = \sqrt{2} \cdot t$$

Mivel abból indultunk ki, hogy t állandó, $\sqrt{2} \cdot t$ is egy konkrét érték, s mivel azt kaptuk, hogy c mindig nagyobb nála vagy egyenlő vele, c a minimumát éppen akkor fogja felvenni, amikor az egyenlőség teljesül. Ez pedig a számtani és mértani közép közötti összefüggés szerint épp akkor következik be, ha a és b egyenlő egymással, azaz ha a háromszög egyenlő szárú.

14. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív valós a szám esetén

$$a + \frac{1}{a} \ge 2$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

Megoldás:

Mivel a és így $\frac{1}{a}$ is pozitív, alkalmazhatjuk a számtani és a mértani közép közötti összefüggést:

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

azaz

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = \frac{1}{a}$, azaz a=1, mivel tudjuk, hogy pozitív.

15. Feladat: Határozzuk meg az

$$f(x) = ax^m + \frac{b}{x^n}$$

függvény legkisebb értékét, ahol *x*>0, *a*>0, *b*>0 és *m*, *n* természetes számok.

Megoldás:

Alakítsuk át az f(x) függvényt!

$$f(x) = ax^m + \frac{b}{x^n} = n\frac{ax^m}{n} + m\frac{b}{mx^n}$$

Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti összefüggést a jobb oldalon álló $m+n$ tagú összegre!

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{n\frac{ax^m}{n} + m\frac{b}{mx^n}}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{\left(\frac{ax^m}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{mx^n}\right)^m}$$

azaz

$$f(x) \geq (m+n)\sqrt[m+n]{\left(\frac{ax^m}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{mx^n}\right)^m} =$$

$$= (m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^n b^m}{n^n m^m}\cdot\frac{x^{mn}}{x^{nm}}} = (m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^n b^m}{n^n m^m}} = \acute{a}lland\acute{o}$$

A keresett minimum értéke tehát ez az *állandó*.

Megkereshetjük a minimum helyét is. A számtani és a mértani közép közötti összefüggésben az egyenlőség akkor áll fenn, ha

$$\frac{ax^m}{n} = \frac{b}{mx^n}$$

teljesül. Innen a minimum helye

$$x = \sqrt[m+n]{\frac{bn}{am}}$$

16. Feladat: Írjuk fel az *a* valós számot két valós *b* és *c* szám összegeként, úgy, hogy a *bc* szorzat a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

A feltétel szerint *a*=*b*+*c*. Legyen $x = b - \frac{a}{2}$. Ekkor $b = \frac{a}{2} + x$ és $c = \frac{a}{2} - x$.

Ekkor

$$bc = \left(\frac{a}{2} + x\right)\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a^2}{4} - x^2 \le \frac{a^2}{4},$$

Mivel $x^2 \ge 0$, bármilyen valós számot is jelentsen az *x*.

Egyenlőség nyilvánvalóan az x=0 esetben állhat fenn, azaz, amikor

$$b = \frac{a}{2} \text{ és } c = \frac{a}{2}.$$

17. Feladat: Határozzuk meg az

$$f(x)=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+x+1}$$

függvény minimumát!

Megoldás:

Alakítsuk át az *f(x)* függvényben szereplő kifejezést!

$$f(x)=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+x+1}=\frac{x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x+1}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{\left(x^2+x+1\right)^2+1}{x^2+x+1}=x^2+x+1+\frac{1}{x^2+x+1}$$

Mivel $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, így egy pozitív valós szám és reciprokának összegét kaptuk, amiről a 14. feladatban beláttuk, hogy nagyobb 2-nél vagy egyenlő vele, és egyenlőség akkor áll fenn, ha $x^2+x+1=1$, azaz $x=0$ és $x=-1$ esetén.

Tehát $f(x)\geq 2$ és egyenlőség akkor áll fenn, ha $x=0$ vagy $x=-1$.

18. Feladat: Határozzuk meg az

$$f(x,y,z)=\frac{(x+y+z)^6}{x\ y^2 z^3}$$

függvény minimumát, ha $x>0$, $y>0$ és $z>0$ valós számok!

Megoldás:

A számtani és a mértani közép közötti összefüggés alapján

$$\frac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}}{6}\geq\sqrt[6]{x\left(\frac{y}{2}\right)^2\left(\frac{z}{3}\right)^3}$$

Egyenlőség akkor teljesül, ha $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

A kapott egyenlőtlenséget átrendezve:

$$\frac{x+y+z}{6}\geq\frac{\sqrt[6]{x\ y^2z^3}}{\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3}},$$

$$\frac{x+y+z}{\sqrt[6]{x\ y^2z^3}}\geq\frac{6}{\sqrt[6]{108}},$$

majd hatodik hatványra emelve:

$$\frac{(x+y+z)^6}{x\ y^2z^3}\geq\frac{6^6}{108}=432$$

Az *f (x,y,z)* függvény minimumának értéke tehát 432.